核心思想

本课程的核心在于 *追求对概念的直观理解*，而非复杂的计算. 需要将代数概念（如矩阵、向量空间）与几何图像（点、线、面、空间变换）紧密联系起来.

> ⓘ 注意
>
> 本笔记基于 2024-2 年的授课情况完成，每一届的选讲内容可能不一致.

第一章：向量

- **核心运算**: 向量加法和标量乘法.
- **线性组合 (Linear Combination)**: 向量 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 的线性组合形式为 $c\vec{v} + d\vec{w}$. 这是整个线性代数中最基本的概念.
- **向量点积 (Dot Product)**:
  - 公式: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
  - 向量的模长: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
  - 向量夹角: $\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$
- **重要不等式**:
  - **柯西-施瓦茨不等式**: $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$
  - **三角不等式**: $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$
- **矩阵方程 $A\vec{x} = \vec{b}$**:
  - 这是线性组合的矩阵形式. 例如，$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$ 可以写作 $A\vec{x} = \vec{b}$，其中 A 的列是向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.
  - 可以将矩阵 A 理解为一个 *变换*，它作用于向量 $\vec{x}$，得到输出向量 $\vec{b}$.
  - 求解方程：若 A 可逆，则解为 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

第二章：求解线性方程组

- **理解 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的两种视角**:
  - **行图像**: 将方程组的每个方程看作 $\mathbb{R}^n$ 空间中的一个超平面（二维是直线，三维是平面)，解是所有这些超平面的 *交点*.
  - **列图像**: 寻找一个正确的线性组合，使得 A 的列向量能够组合成向量 $\vec{b}$. 解向量 $\vec{x}$ 就是这个线性组合的 *系数*.
- **高斯消元法**:
  - 通过一系列 *行变换* 将矩阵 A 转化为一个 *上三角矩阵* U.
  - **$A = LU$ 分解**: 如果没有行交换，消元过程可以表示为 $A = LU$. L 是一个对角线为 1 的下三角矩阵，记录了消元的乘数；U 是消元后的上三角矩阵.
  - **$PA = LU$ 分解**: 如果进行了行交换，则用置换矩阵 P 来记录行交换操作.
  - **求解**: 通过增广矩阵 $\left[A|\vec{b}\right]$ 进行消元，化为 $[U|\vec{c}]$，然后通过回代求解.
- **矩阵乘法**:
  - **核心规则**: $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$. 前一个矩阵的列数必须等于后一个矩阵的行数.
  - **不可交换**: 通常 $AB \neq BA$.
  - **分块理解**:
    - **列乘以行**: A 的各列乘以 B 的对应各行，然后相加，得到最终矩阵. $AB = \sum(\text{col}_k \text{ of } A)(\text{row}_k \text{ of } B)$.

- **整列操作**: AB 的第 j 列，是 A 乘以 B 的第 j 列向量.
- **整行操作**: AB 的第 i 行，是 A 的第 i 行向量乘以 B.

- **逆矩阵**:
  - **存在条件**: 当且仅当矩阵 A 是 满秩 *(full rank)* 的（即行/列向量线性无关，行列式不为零）.
  - **求解 (高斯-若尔当法)**: 构造增广矩阵 $[A|I]$，通过行变换将其变为 $[I|A^{-1}]$.
  - **二阶矩阵的逆**: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- **转置与对称矩阵**:
  - **转置**: A^T，沿主对角线翻转. $(AB)^T = B^T A^T$.
  - **对称矩阵**: 满足 $A = A^T$.
  - **重要构造**: $A^T A$ 和 AA^T 总是对称矩阵.

第三章：向量空间

- **向量空间**: 对加法和数乘运算 封闭 的向量集合.
- **子空间**: 向量空间的子集，且自身也满足向量空间的全部性质.
  - **两个判定条件**: 1. 对数乘封闭；2. 对加法封闭.
  - **关键**: 任何子空间都必须包含零向量.
- **矩阵的四个基本子空间**:
  - **列空间 $C(A)$**: 矩阵 A 所有列向量的线性组合 构成的空间.
    - $A\vec{x} = \vec{b}$ 有解的充要条件是 $\vec{b} \in C(A)$.
    - $C(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间（A 是 $m \times n$ 矩阵）.
  - **零空间 $N(A)$**: 所有满足 $A\vec{x} = \mathbf{0}$ 的解向量 $\vec{x}$ 构成的空间.
    - $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
    - 零空间由 $A\vec{x} = \mathbf{0}$ 的特解线性组合而成.
- **秩**:
  - **定义**: 矩阵 A 的 主元 *(pivot)* 的个数，等于列空间 $C(A)$ 的维度.
  - **主列与自由列**: 消元后，含有主元的列是 主列，不含主元的列是 自由列. 自由列对应的变量是自由变量.
- **线性代数基本定理**:
  - 维度关系: 对于 $m \times n$ 矩阵 A，其秩为 r.
  - **列空间维度**: $\dim(C(A)) = r$
  - **零空间维度**: $\dim(N(A)) = n - r$ (自由变量的个数)
- **$A\vec{x} = \vec{b}$ 的完整解**:
  - **核心公式**: $\vec{x}_{\text{complete}} = \vec{x}_p + \vec{x}_n$
  - **$\vec{x}_p$ 特解**: 这是满足 $A\vec{x}_p = \vec{b}$ 的 任意一个 解. 通常，我们可以通过设置所有自由变量为 0，然后求解主变量来得到一个简单的特解.
  - **$\vec{x}_n$ 零空间解**: 这是满足 $A\vec{x}_n = \mathbf{0}$ 的 所有 解，也就是 A 的零空间 $N(A)$. 它由零空间的基（特解）线性组合而成.
  - **几何意义**: $A\vec{x} = \vec{b}$ 的所有解，构成一个 仿射子空间. 它是将 A 的零空间 $N(A)$（一个穿过原点的空间）平移 $\vec{x}_p$ 的距离得到的.

第四章：正交性

- **正交向量**: 点积为零的两个向量 ($\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$).
- **投影**: 将向量 $\vec{b}$ 投影到向量 $\vec{a}$ 所在直线上.
  - 投影向量 $\vec{p}$: $\vec{p} = \frac{\vec{a}^T \vec{b}}{\vec{a}^T \vec{a}} \vec{a}$
  - 误差向量 $\vec{e}$: $\vec{e} = \vec{b} - \vec{p}$ (误差向量与 $\vec{a}$ 正交)
- **必考 格拉姆-施密特正交化**:
  - **目标**: 将一组线性无关的基向量 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\}$ 转化为一组 标准正交基 $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, ...\}$.
  - **步骤**:
    1. 第一个向量: $\vec{A}_1 = \vec{a}_1$
    2. 第二个向量: $\vec{A}_2 = \vec{a}_2 - \left(\text{proj}_{\vec{A}_1} \vec{a}_2\right)$ (用 $\vec{a}_2$ 减去它在已正交化向量上的所有投影分量)
    3. 第三个向量: $\vec{A}_3 = \vec{a}_3 - \left(\text{proj}_{\vec{A}_1} \vec{a}_3\right) - \left(\text{proj}_{\vec{A}_2} \vec{a}_3\right)$
    4. ...
    5. **单位化**: 将所有得到正交向量 $\vec{A}_i$ 全部除以其模长，得到标准正交基 $\vec{q}_i = \frac{\vec{A}_i}{\|\vec{A}_i\|}$.
- **$A = QR$ 分解**: 任何列满秩矩阵 A 都可以分解为一个正交矩阵 Q 和一个上三角矩阵 R 的乘积. 这本质上是 Gram-Schmidt 过程的矩阵形式.

第五章：行列式

- **核心性质**:
  - $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$` 可 逆 ` $\Leftrightarrow A$` 满 秩 ` $\Leftrightarrow A$` 的行/列向量线性无关.
  - $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
  - $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
  - $\det(A^T) = \det(A)$
  - $\det(kA) = k^n \det(A)$ (n 是矩阵阶数)
- **计算方法**:
  - **必考 代数余子式展开**:
    - 沿任一行或一列展开. 沿第 i 行展开: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$
    - M_{ij} 是划去第 i 行第 j 列后剩余子矩阵的行列式（余子式）.
    - $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为代数余子式.
- **克莱姆法则**: 求解 $A\vec{x} = \vec{b}$.
  - 解的分量 $x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}$，其中 B_j 是将 A 的第 j 列替换为向量 $\vec{b}$ 后得到的新矩阵. (计算量大，理论意义为主)
- **几何意义**:
  - 行列式的绝对值 $|\det(A)|$ 代表了由 A 的列向量张成的平行多面体（二维是平行四边形, 三维是平行六面体）的 体积.
  - 行列式的符号代表了 方向. $\det(A) > 0$ 保持定向 (如右手系)，$\det(A) < 0$ 反转定向.
- **必考 逆矩阵公式**:
  - $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$，$C^T$ 是代数余子式矩阵 C 的转置（伴随矩阵）.

第六章：特征值与特征向量

- **定义**: 对于矩阵 A，若存在数 λ 和非零向量 $\vec{x}$ 满足 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$，则 λ 是 A 的一个 特征值，$\vec{x}$ 是对应的 特征向量.
  - 特征向量指在 A 变换下，方向保持不变（仅被拉伸或压缩）的向量.
- **核心性质**:

  - **迹 (Trace)**: $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i$ (主对角线元素之和 = 特征值之和)
  - **行列式**: $\det(A) = \prod \lambda_i$ (行列式 = 特征值之积)
  - **零特征值**: A 有特征值 $\lambda = 0 \Leftrightarrow A$ 是 奇异矩阵 (不可逆, $\det(A) = 0$).
- **必考 重要推论**:
  - 若 A 的特征值为 λ，则 A^k 的特征值为 λ^k，A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$. 它们共享相同的特征向量.
  - AB 和 BA 具有 相同的特征值.
- **对角化**:
  - **条件**: $n \times n$ 矩阵 A 有 n 个 线性无关的特征向量.
  - **公式**: $A = X\Lambda X^{-1}$
    - X: 列向量是 A 的特征向量.
    - Λ: 对角线上是 A 的特征值 (与 X 中的特征向量顺序对应).
  - **快速判断**: 如果一个矩阵的所有特征值都 各不相同，则它一定可以对角化.
- **对称矩阵的谱定理 (Spectral Theorem)**:
  - 任何对称矩阵 A 都具有:
    1. n 个 实数 特征值.
    2. n 个 互相正交 的特征向量.
  - 因此，任何对称矩阵都可以被 正交对角化: $A = Q\Lambda Q^T$，其中 Q 是由标准正交特征向量构成的正交矩阵 ($Q^{-1} = Q^T$).
- **必考 正定矩阵**:
  - 一个对称矩阵是正定的，等价于满足以下任一条件:
    1. 所有 特征值 都为正数 ($\lambda_i > 0$).
    2. 所有 主元（无行交换）都为正数.
    3. 所有左上角 $k \times k$ 子矩阵的 行列式 都为正数.
    4. 对于任意非零向量 $\vec{x}$，二次型 $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$.

考试技巧

- **复习重点**: 第五章 *(行列式)* 和 第六章 *(特征值)* 占比较大.
- **判断题**:
  - 如果结论为 真 *(True)*，要简要 说明原因（引用定理或性质）.
  - 如果结论为 假 *(False)*，必须 举出一个反例. 例如，不可对角化的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是很多关于对角化命题的绝佳反例.
- **重要公式和过程要熟练**:
  - Gram-Schmidt 正交化
  - 代数余子式求行列式和逆矩阵
  - 特征值、特征向量的求解 ($\det(A - \lambda I) = 0$)
  - 对角化 $A = X\Lambda X^{-1}$
  - 对称矩阵的谱定理 $A = Q\Lambda Q^T$